REVISTA

CICEP EVOLUÇÃO

AGOSTO DE 2024 V.3 N.8

ISSN: 27645363

DATA DE PUBLICAÇÃO: 10/08/2024

SL EDITORA

Revista Evolução CICEP

N° 8

Agosto 2024

Publicação

Mensal (agosto)

SL Editora

Rua Bactória, 164, Torre 2 - 85 – Jardim Vila Formosa 03472-100

São Paulo – SP – Brasil

www.sleditora.com

Editor Chefe

Neusa Sanches Limonge

Projeto Gráfico e capa

Lucas Sanches Limonge

Diagramação e Revisão

Rafael Sanches Limonge

Responsável Intelectual pela Publicação

Centro Institucional de Cursos Educacionais Profissionalizantes (CICEP)

Revista Evolução CICEP – Vol. 3, n. 8 (2024) - São Paulo: SL Editora, 2024 – Mensal

Modo de acesso: https://www.revistaevolucaocicep.com.br/

ISSN 2764-5363 (online)

Data de publicação: 10/08/2024

1. Educação 2. Formação de Professores

CDD 370

CDU 37

Renato Moreira de Oliveira – Bibliotecário - CRB/8 8090

SUMÁRIO

AS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU NOS LIVROS DIDÁTICOS

Cassio Domingos Ferreira

RESUMO

Esse Trabalho tem como tema as equações quadráticas e suas características como objeto de ensino durante os anos finais da educação básica (8° série / 9° ano). O objetivo é analisar os métodos costumeiramente adotados nas escolas e livros didáticos para ensinar esse assunto e no final fazer uma proposta de ensino diferenciada, que apresente algum elemento novo para o ensino das equações do segundo grau.

Palavras-chave: Matemática; Equações; Aprendizagem.

INTRODUÇÃO

O presente Trabalho inicia com uma introdução histórica e pedagógica, onde procuramos ressaltar os principais acontecimentos que permitiram o desenvolvimento das equações do segundo grau até o ponto em que estamos hoje. Também apresentamos as orientações e sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (1998) e da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2010) sobre o ensino e a aprendizagem das equações quadráticas durante a 8ª série / 9º ano do Ensino Fundamental.

As equações do segundo grau, de acordo com Eves (2004), são estudadas desde a época dos egípcios, babilônios, gregos, hindus e chineses. Cada um desses povos desenvolveu métodos diferentes para resolver problemas envolvendo equações quadráticas. Alguns desses métodos têm características muito semelhantes, outros, porém, nada possuem de comum entre si.

Segundo Boyer (2003), os egípcios foram os primeiros a trabalharem com equações, mas é dos babilônios o primeiro registro de equações do segundo grau. Esse povo tinha uma álgebra bastante desenvolvida e resolviam equações quadráticas por técnicas semelhantes às atuais, mais precisamente pelo método de completar quadrados ou pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral. Contudo, como os babilônios interpretavam geometricamente as resoluções dos problemas de equações quadráticas, as raízes negativas não eram consideradas. Os egípcios também não consideram as raízes negativas, apesar de terem chegado muito próximo de fazer isso. Mas o fato é que a resolução de equações quadráticas pelos babilônios chegou mais longe do que a resolução pelos egípcios, assim como a matemática.

> No fim do século XIX e na primeira metade do século XX, as pesquisas dos arqueólogos e dos historiadores da Matemática modificaram totalmente nossa avaliação da qualidade da matemática praticada na Mesopotâmia, mostrando claramente que era mais desenvolvida do que a Matemática egípcia. (PITOMBEIRA, 1984, p. 52)

De acordo com Boyer (2003), os gregos também resolviam equações do segundo grau através de interpretações geométricas. Vários matemáticos da Grécia, entre eles, Pitágoras (± 571 a.C - ± 496 a.C.), Euclides (360 a.C. –295 a.C.), Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) e Apolônio de Perga (262 a.C. – 190 a.C.), estudaram ou precisaram resolver equações do segundo grau e para isso sempre aplicaram seus conhecimentos de geometria. Apesar de conseguir respostas verdadeiras, essa técnica tinha alguns defeitos, como por exemplo, desconsiderar as raízes com valores negativos.

Contudo, segundo Boyer (2003), foi justamente na Grécia que surgiu o matemático responsável pelo primeiro passo para a criação de uma resolução algébrica das equações. Diofante ou Diophanto (360 a.C. – 295 a.C.), nascido em Alexandria, elaborou muitas obras sobre aritmética, em várias delas nota-se a presença de abreviações para incógnitas. Essa prática permitiu o desenvolvimento dos estudos de equações acima de grau três, ampliando a abrangência da álgebra. Depois dessa, não ocorreram outras contribuições significativas da Grécia para as equações do segundo grau. Uma das razões disso é o declínio que a civilização grega começou enfrentar na história. Mesmo assim, muitos outros tópicos matemáticos forma influenciados pela matemática grega.

Segundo Pitombeira (1984), o povo antigo que mais contribuiu para o desenvolvimento da álgebra, especialmente das equações quadráticas, foi o da Índia. Diversos matemáticos se destacaram, entre eles Aryabhata (476- 550), que foi responsável por trazer a resolução geométrica das equações do segundo grau, até então desconhecida pelos hindus. A partir desse fato, outros matemáticos se interessaram por criar modos diferentes para resolver uma equação quadrática. Bakshali (523 – 602), por exemplo, tentou solucionar essas equações através de progressões aritméticas, chegou próximo do algoritmo moderno para resolução das equações quadráticas, mas não obteve sucesso.

> As equações de 2° grau surgem pela primeira vez na matemática hindu nos sulvasutras, sob as formas $ax^2 = c$ e $ax^2 + bx = c$, sem que sejam apresentadas soluções. Mais tarde, no manuscrito de Bakshali é descrito um procedimento de solução que corresponde à fórmula moderna, mas com alguns erros. (PITOMBEIRA, 1984, p. 76).

Segundo Eves (2004), Brahmagupta (589-668) optou por utilizar técnicas de máximo divisor comum para resolver equações quadráticas, porém, também fracassou. Mesmo assim, Brahmagupta ainda conseguiu enunciar várias regras para resolução de uma equação do segundo grau, depois que estudou processos utilizados por outros povos.

Depois de Brahmagupta, segundo Boyer (2003), surgiu outro matemático hindu tão bom quanto. Bhaskara (1114-1185) até hoje é famoso por todo o planeta e no Brasil, inclusive, nomeia a fórmula resolutiva para equação do segundo grau. Aliás, essa foi a maior descoberta do matemático. Para a grande maioria dos pesquisadores, Bhaskara não foi o responsável direto por elaborar a fórmula geral das equações quadráticas, porém, foram graças aos seus estudos e principalmente resoluções baseadas no método de complemento de quadrados, que mais tarde, alguns matemáticos europeus chegaram a atual fórmula resolutiva, chamada por muitos de fórmula de Bhaskara. Contudo, não há evidências concretas para afirmar se Bhaskara chegou ou não a essa fórmula geral.

Segundo Boyer (2003), assim como os hindus, também os árabes desenvolveram métodos próprios de resolução das equações do segundo grau. O matemático Al-khowarizmi (780 - 850), por exemplo, considerado “o pai da álgebra”, utilizou seus brilhantes conhecimentos algébricos para estudar profundamente essas equações. Para começar, ele dividiu as equações quadráticas em seis tipos diferentes e tratou de elaborar uma maneira, uma fórmula distinta para resolver cada uma delas. Além disso, esses seis tipos de equações eram agrupados em equações simples ou equações combinadas. De acordo com Eves (2004), ainda hoje fazemos algo parecido com o que

Al-Khowarizmi, realizou: dividimos as equações do segundo grau em completas e incompletas, a partir dos coeficientes não nulos dessas equações.

Ainda segundo Eves (2004), Al-Khowarizmi reduzia a equação quadrática qualquer para um dos seis tipos descritos pelo próprio e dessa forma a resolvia. Essa redução à forma canônica, como denominamos hoje, era feita por meio dos conhecimentos em números racionais, proporções e igualdades, assuntos plenamente dominados por Al-Khowarizmi e quase todos os matemáticos árabes do período. Outro ponto interessante nessa resolução de equação do segundo é que cada fórmula criada por Al-Khowarizmi para cada tipo de equação é demonstrada por ele, pois o matemático era bastante rígido e sistemático.

De acordo com Boyer (2003), os estudos dos árabes abriram muitas portas para os europeus, nos anos posteriores desenvolverem por completa a fórmula geral da equação do segundo grau. mas o maior feito dos matemáticos europeus, isso já por volta dos séculos XIV e XV, foi o uso dos coeficientes e raízes negativas. Até então, os outros povos haviam desconsiderado as raízes negativas, pois resolviam equações quadráticas geometricamente ou ainda, pouco tinham trabalhado com as raízes negativas por um motivo ou outro. Contudo, os matemáticos da Inglaterra, Alemanha, Áustria, França, etc. possuíam uma álgebra bastante desenvolvida e assim uma facilidade enorme para pesquisar sobre as raízes negativas das equações do segundo grau.

Segundo Boyer (2003), foi Michael Stifel (±1487 – 1567), alemão, o primeiro matemático moderno a introduzir coeficientes possivelmente raízes negativas nas equações quadráticas. Depois dele, François Viéte (1540 - 1603), um dos maiores matemáticos de todos os tempos, também teria usado coeficientes negativos nessas equações. No entanto, a grande contribuição de Viéte para a resolução de equações de todos os graus e para a toda a matemática foi utilizar letras distintas para representar uma quantidade conhecida e uma grandeza desconhecida respectivamente numa equação. De acordo com os estudiosos, o matemático usou uma vogal para o valor conhecido e uma consoante para o valor desconhecido. Apesar da aparência simples, essa medida ainda não havia sido adotada por nenhum outro matemático, pelo menos no ramo das equações, e assim, foi possível escrever qualquer equação de determinado grau de maneira genérica. Hoje, por exemplo, costumamos escrever de forma geral, toda equação quadrática por meio de letras: $ax^2 + bx + c = 0$.

Contudo, segundo Boyer (2003), muitos historiadores não creditam mais a Stifel o título de primeiro matemático moderno a apresentar soluções negativas para equações negativas. Existem fortes indícios que o responsável por tal criatividade foi Nicole Oresme (1323-1382), que realizou esse fato ao estudar os métodos de resolução dos hindus, principalmente, de Bhaskara. Oresme teria observado a validade do algoritmo de Bhaskara e ao mesmo tempo notado a ausência coeficientes ou raízes negativas, corrigindo, pois, essa falha. Dessa forma, podemos afirmar que o verdadeiro criador da fórmula de Bhaskara foi Oresme, entretanto, o título não lhe é dado porque seria ao mesmo tempo injusto com o hindu Bhaskara que, desenvolveu todo o algoritmo, desconsiderando apenas as raízes negativas.

De acordo com Boyer (2003), logo após Stifel, Viéte e Oresme, surgiu outro matemático importante para o desenvolvimento da álgebra e das resoluções de equações. Albert Girard (1595 - 1632) enunciou e demonstrou o Teorema Fundamental da Álgebra, fato inédito até a época, além de considerar raízes negativas para equações de qualquer grau, indo mais longe, inclusive do que o matemático Michael Stifel. Barcelos (2010) faz referência ao enunciado a Carneiro (2000) que enuncia o Teorema Fundamental da Álgebra, estudado por Girard.

> Toda equação completa de grau n tem o número de soluções igual ao seu grau. Smith (43, pág. 474) completou a ideia anterior, dizendo que o primeiro escritor afirma que “qualquer equação de grau n tem exactamente n soluções e não mais.” (CARNEIRO, 2000, p. 99).

Para Boyer (2003), alguns matemáticos que viveram na mesma época de Girard e que se destacaram com grandes descobertas, apesar de serem bastante citados no desenvolvimento das equações quadráticas, não merecem tal reconhecimento, pois seus estudos pouco acrescentaram. É o caso de René Descartes (1596–1650) e Pierre de Fermat (1601 – 1665). Os foram geniais, porém, o primeiro destaca-se no ramo das equações do segundo grau porque retomou o estudo geométrico dessas, que havia sido abandonado desde praticamente a Grécia antiga. Fermat, por sua vez, construiu gráficos de diferentes equações de diferentes graus. Sem dúvida, os trabalhos desses dois matemáticos foram importantes para a matemática como um todo, pois a partir daí a geometria analítica começou a tomar ares mais modernos. Contudo, os simples fatos de Descartes e Fermat não considerarem as raízes negativas já é motivo para colocá-los no rol daqueles que pouco influenciaram as equações quadráticas ao longo do tempo. Mesmo assim, ambos são bastante citados nos livros de história da matemática.

Quem modificou mesmo o rumo das equações do segundo grau, de acordo com Boyer (2003), foi o matemático Colin MacLaurin (1698–1746). Ele teria sido uma espécie de “Euclides das equações”. Isto é, MacLaurin não realizou grandes descobertas nesse ramo, pois ele próprio percebeu que o conhecimento sobre o assunto era gigantesco, mas ao mesmo tempo, desorganizado. O matemático, então, resolveu organizar todo o saber sobre equações quadráticas da época. Nesse trabalho MacLaurin utilizou sua genialidade indiscutível para demonstrar alguns teoremas e finalizar o estudo do tema. O matemático considerou as raízes positivas e negativas para qualquer equação quadrática, considerou todos os casos de equações do segundo grau como um só, utilizou uma notação muito semelhante à atual, como já ocorria em alguns casos na época com outros matemáticos, por fim, ainda apresentou uma demonstração da fórmula geral da equação quadrática praticamente idêntica a de hoje em dia, com certeza, inspirado nos estudos de Bhaskara e Oresme.

Passados alguns séculos do trabalho de MacLaurin, segundo Eves (2004), muitos pontos forma alterados, não necessariamente quanto aos conceitos em si, mas sobretudo, quanto ao modo de apresentação. Isso se deu, principalmente, depois da formulação da Teoria dos Conjuntos, que influenciou toda a matemática. Mesmo assim, os relatos de Maclaurin não foram descartados e até hoje são importantes.

Escolhemos as equações quadráticas como tema desse Trabalho de Conclusão de Curso, pois além de ser um assunto de grande importância, tanto dentro da matemática pura quanto da aplicada, também nos chamou atenção o fato de ser possível realizar muitas atividades pedagógicas com essas equações, apesar de isso não ser tão praticado nas salas de aula. Por fim, ainda consideramos o fato de ser um tema com um enorme número de fontes de referências, entre Monografias, artigos, livros etc.

Verificamos através de reportagens, depoimentos de pais e professores ou mesmo comentários de colegas frequentadores de escolas brasileiras, que o ensino de matemática segue um caminho caótico, principalmente nas últimas duas décadas. São colocados vários motivos para esse quadro horrível que presenciamos. Especialistas colocam a culpa na má formação de professores, esses reclamam da falta de interesse dos alunos, que citam a falta de dinamismo das aulas. Independente do motivo verdadeiro, o grande problema é que mais da metade dos alunos do nono ano do Ensino Fundamental não conseguem resolver uma equação do segundo grau e ainda dentre esses existem muitos que não resolvem nem mesmo uma equação do primeiro grau ou tão pouco sabem o que é uma equação.

De acordo com Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), algumas das grandes vilãs da aprendizagem de matemática são as atuais práticas de ensino das equações, inseridas no campo da álgebra. O excesso de formalização, técnicas de resolução, fórmulas, definições e teoremas tornam a aprendizagem da matemática “chata, insuportável, inútil” para os alunos. Por esse motivo, os PCNs (1998) recomendam várias alterações a serem adotadas por professores e por livros didáticos, para que o quadro atual do ensino de matemática, que é caótico, seja o mais breve possível melhorado.

Um dos primeiros pontos destacados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) é a necessidade de desenvolver no aluno a capacidade de abstrair, ou seja, de imaginar situações, mas sem esquecer da importância de revelar a aplicação do assunto no cotidiano dele. O que acontece hoje, na grande maioria das vezes, é que os professores focam apenas um desses pontos: ou apenas abstraem o assunto e assim o estudante fica sem saber para que e onde ele use aquilo, ou então, apenas trabalha o tema no contexto do dia a dia, tornando-o muito simples, pois vários conceitos são eliminados.

Da mesma forma, os Parâmetros Curriculares (1998) também destacam a necessidade de se trabalhar com as situações problemas, pois elas são uma grande possibilidade de unir contextualização e abstração, sem deixar de lado algum conceito significativo do tema abordado.

> O ensino da álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e as ideias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções da álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas). (PCN, 1998, p. 84)

Outro fato interessante destacado pelos PCNs (1998) é a abordagem não hierárquica, isto é, uma abordagem que não necessariamente comece pela definição do tema e depois siga com exemplos de aplicação, finalizando com exercícios de fixação. Desde os primeiros temas trabalhados lá no primário (operações fundamentais etc.) existe um costume entre os professores de matemática para seguir rigorosamente certa ordem de apresentação dos conteúdos, como se a mudança de posição de um item ou outro destruirá toda a chance de aprendizagem do estudante. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) afirmam justamente o contrário quando defendem uma dinâmica maior no trabalho dos assuntos de matemática. Desse modo, ao invés de iniciar pela definição da equação quadrática, por exemplo, o professor pode optar por começar a resolver com os alunos essas equações.

O interessante é que os próprios PCNs (1998) afirmam que essa não hierarquização dos conteúdos se torna estranha, incompreensível para estudantes e até professores se ela não for trabalhada dentro de uma situação problema. Ou seja, é preciso fazer com que o aluno sinta a necessidade de resolver aquela equação, para então, depois de resolvida, ele possa descobrir do que se trata. Caso contrário, não fará nenhum sentido propor ou ensinar métodos de resolução de uma coisa que o aluno não conhece e tão pouco vê aplicação.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), aprender matemática não é apenas aprender a resolver fórmulas, determinar o valor da incógnita ou decorar teoremas. Aprender matemática é compreender o mundo em sua volta e reconhecer as ferramentas que podem ser usadas para modificar esse mundo.

> A aprendizagem em matemática está ligada à compreensão, isto é, a atribuição e apreensão de significado de um objeto ou acontecimento pressupõem identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratado dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas.
> (PCN, 1998, p. 57)

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2010) faz considerações parecidas com as dos PCNs. No texto também existem incentivos aos professores para que eles apliquem atividades mais concretas e contextualizadas para os alunos do Ensino Fundamental. As equações quadráticas, de acordo com a Proposta devem ser trabalhadas no último ano ciclo II, ou seja, nono ano (ou oitava série). Contudo, esse trabalho começa na série anterior, quando é introduzido o conceito de equação, pois, se esse conteúdo não for bem compreendido, os problemas de aprendizagem vão continuar durante os anos seguintes, inclusive no momento de estudar equações de um grau mais alto.

A Proposta Curricular de São Paulo (2010) demonstra bastante preocupação quanto à abstração dos temas matemáticos, principalmente, os algébricos. Segundo suas afirmações, a abstração é uma competência muito importante para ser desenvolvida no aluno, pois será fundamental na própria vida e não apenas para resolver questões matemáticas. Então, cabe aos professores procurarem desenvolver essa habilidade, trabalhando a partir de situações problemas a formalização e a generalização dos conteúdos, no caso, das equações do segundo do grau.

Quanto a apresentação dos conteúdos, a Proposta Curricular de São Paulo (2010) não é tão intensa como os PCNs (1998) e não criticam por completo a apresentação hierárquica dos temas. Apenas há sugestões para que alguns conteúdos, entre eles, as equações, sejam desenvolvidos a partir de situações problemas e, portanto, não necessariamente seguindo uma ordenação fixa dos tópicos. Ainda assim, logo depois, há sugestões de organização do tratamento das equações quadráticas. O professor deve, por exemplo, começar pelas equações incompletas e só então ensinar as equações completas. Na mesma orientação, há comentários sobre a resolução geométrica das equações quadráticas, recomendando que também esse item seja trabalhado na oitava série, dentro das equações completas do segundo grau.

A partir dessa análise dos PCNs (1998) e da Proposta Curricular de São Paulo (2010), realizamos esse Trabalho de Conclusão de Curso, procurando investigar como se dá o ensino das equações quadráticas na oitava série e como é possível realizar alterações nesses métodos de ensino tradicionais. Nos próximos capítulos, aparecem pesquisas sobre o conceito de equação quadrática, sobre as técnicas de ensino adotadas em alguns livros analisados e por fim, uma proposta de ensino para as equações quadráticas a ser adotada no nono ano do Ensino Fundamental. As referências usadas nessas pesquisas, as metodologias adotadas aparecem no decorrer dos textos.

AS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Conceitos Iniciais

Abaixo apresentamos uma definição de equação enunciada por Barcelos (2011).

> Segundo Lungarzo (1994), uma equação é uma igualdade, dentro da qual figura uma entidade não determinada, que indica um número oculto a ser descoberto. A esse número, cujo valor ainda não se conhece, dá-se o nome de incógnita, tradicionalmente indicada pelas letras x, y, z... (BARCELOS, 2011, p. 18)

Observando a citação acima, podemos ainda completar, afirmando que, de acordo com Scipione (1997), toda equação tem grau, definido pelo maior expoente da incógnita em questão. Assim sendo, uma equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$ é uma equação do segundo grau, pois o maior expoente da incógnita x é o 2.

Segundo Barcelos (2011), resolver uma equação é determinar o valor da incógnita, permitindo que, a igualdade expressa se torne verdadeira. Como exemplo, podemos citar a equação $x^2 + 3x + 4 = 4$. Resolve-la, pois então, significa determinar qual o valor do x para que tal igualdade seja correta. Assim, teremos que o valor do x será 0, pois $0^2 + 3.0 + 4 = 4$. Logo, a solução da equação é 0 (zero).

Segundo Barcelos (2011), uma equação linear (primeiro grau) tem apenas uma solução. Já as equações quadráticas (segundo grau) têm duas soluções, que porventura, podem ser iguais ou diferentes. Toda equação, independente do grau, é classificada em possível e impossível. A primeira porque tem solução, ao contrário da segunda. Há também as equações indeterminadas, quando admitem muitas soluções. Essa última acontece bastante com as equações literais, isto é, com aquelas nas quais, os coeficientes são letras ao invés de números reais. Abaixo, seguem alguns exemplos dos dados citados.

Equações lineares (1º grau): *1)* $x + 3 = 0$
2) $3x – 6 = 2$
3) $-4 + x = - 3x$

Equações quadráticas (2º grau): *1)* $3x^2 - 12 = 0$
2) $– 4x^2 + 9x + 5 = 1$
3) $x^2 = - 2$
4) $5x = - 6x^2$

Equações possíveis (1º e 2º grau): *1)* $x + 3 = 0 \rightarrow x = - 3$, *pois* $– 3 + 3 = 0$

2) $3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = 2$ ou $x = -2$, pois $3(2)^2 - 12 = 0$

Equações impossíveis (1° e 2° grau):

1) *$0x = 5$, x não existe, pois não existe um número que multiplicado por 0 resulte em 5*
2) *$x^2 = -2$, x não existe, pois não existe raiz quadrada de número negativo*

De acordo com Barcelos (2011), toda equação que pode ser expressa na forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são coeficientes reais ($a \neq 0$) e x a incógnita, são nomeadas de equações quadráticas ou equações do segundo grau. Ao contrário do coeficiente a, os coeficientes b e c podem ser nulos, quando isso acontece, a equação quadrática é chamada de incompleta. Como dito anteriormente, uma equação do segundo grau admite duas raízes reais, que podem ser iguais ou diferentes. Claro que, podem existir equações que não admitem solução alguma, ou seja, são impossíveis.

Resolvendo Equações do Segundo Grau

A resolução de equações quadráticas, como vista na introdução desse Trabalho de Conclusão de Curso, foi motivo de dor de cabeça para vários matemáticos do passado. Hoje, o principal método de resolver uma equação desse grau é a fórmula de Bhaskara. No entanto, a própria fórmula de Bhaskara é derivada de uma técnica mais elementar, baseada nas ideias de fatoração. O método de completar quadrados foi introduzido à séculos e até então, é o melhor método para resolver qualquer equação do segundo grau (completa o incompleta). A seguir, apresentamos a resolução, por fatoração, de todos os casos de equações quadráticas.

Resolução do caso $ax^2 = 0$

Tomando a forma normal $ax^2 + bx + c = 0$ como base, temos que 1° caso indica que b = 0 e c = 0, então:

$ax^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 0 / a \quad \rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm \sqrt{0} \quad \rightarrow \quad x = \pm 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Portanto, nesse primeiro caso, todas as equações resultam em zero.

Resolução do caso $ax^2 = k$

Tomando a forma normal $ax^2 + bx + c = 0$ como base, temos que 2° caso indica que b = 0 e c = 0 e $K \in R$, então:

$ax^2 = K \quad \rightarrow \; x^2 = K / a \quad \rightarrow \quad x = \pm \sqrt{\frac{K}{a}} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{K}{a}}$ ou $x = - \sqrt{\frac{K}{a}}$

Portanto, nesse segundo caso, todas as equações resultam em $x = \pm \sqrt{\frac{K}{a}}$

Resolução do caso $ax^2 + bx = 0$

Tomando a forma normal $ax^2 + bx + c = 0$ como base, temos que 3° caso indica que c = 0, então:

$ax^2 + bx = 0 \quad \rightarrow \quad x.(ax + b) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$ e $ax + b = 0 \quad \rightarrow \quad ax = - b \rightarrow \; \rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$

Portanto, nesse terceiro caso, todas as equações resultam em x = 0 e $x = -\frac{b}{a}$

Resolução do caso $ax^2 + c = 0$

Tomando a forma normal $ax^2 + bx + c = 0$ como base, temos que 4° caso indica que $b = 0$, então:

$$ax^2 + c = 0 \quad \rightarrow \quad ax^2 = -c \quad \rightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Portanto, nesse quarto caso, todas as equações resultam em $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Resolução do caso $ax^2 + bx + c = 0$

A resolução das equações completas é a mais trabalhosa e envolve além das propriedades das igualdades e das regras de fatoração, o complemento de quadrados. Por isso, em determinadas passagens apresentamos comentários, a fim de auxiliar o entendimento dos passos que estão sendo dados.

Tomando a forma normal $ax^2 + bx + c = 0$ como base, temos que 5° caso indica que $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$4a(ax^2 + bx) = -4ac$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Ao chegarmos aqui, é possível perceber que, no primeiro membro da igualdade, temos uma expressão que não é um quadrado perfeito, mas pode se tornar quando acrescentarmos b^2. Ao fazer isso, contudo, como estamos trabalhando com uma equação, também devemos acrescentar b^2 ao segundo membro. Então:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$(2ax + b)^2 = b^2 – 4ac$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dessa forma, encontramos a fórmula de Bhaskara, que na verdade, é o resultado da resolução da equação quadrática $x^2 + bx + c = 0$, ou se já, da forma normal de toda equação do segundo grau. Com essa fórmula é possível resolver todos os cinco casos de equações quadráticas citadas acima. Aliás, é importante ressaltar que, tais casos só existem nesse Trabalho de Conclusão de Curso, com o objetivo de melhor explicar a resolução por fatoração de equações do segundo grau. Na verdade, os matemáticos dividem as equações quadráticas apenas em dois casos: completas e incompletas, já comentadas nesse texto.
A resolução ou demonstração da Fórmula de Bhaskara enunciada acima foi retirada de Barcelos (2011), que também comenta sobre a expressão $b^2 - 4ac$, parte integrante da fórmula de resolução.

> A expressão $b^2 - 4ac$ chama-se discriminante da equação do segundo grau, e é representada pela letra grega maiúscula Δ (delta). É ela que discrimina o número e o tipo de raízes de uma equação quadrática. Esse discriminante pode ser positivo, negativo ou nulo:
>
> Se $\Delta > 0$ (positivo), a equação do segundo grau tem duas raízes reais diferentes.
> Se $\Delta < 0$ (negativo), a equação do segundo grau não tem raízes reais.
> Se $\Delta = 0$ (nulo), a equação do segundo grau tem duas raízes reais e iguais. (BARCELOS, 2011, p. 24)

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Os livros analisados nesse Trabalho de Conclusão de Curso foram escolhidos, pois fazem parte de nosso acervo pessoal, assim como, também estão presentes em boa parte das salas de aulas da região. Escolhemos duas obras, por acharmos um número adequado para se fazer as devidas conclusões ao final. Como na introdução analisamos e consideramos as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), realizamos uma comparação entre as obras analisadas e as sugestões dadas nos PCNs (1998).

A análise de cada livro segue em um texto específico.

Primeiro Livro Analisado

Livro: Matemática e Realidade

Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado.

Editora: Atual

Ano de publicação: 2005

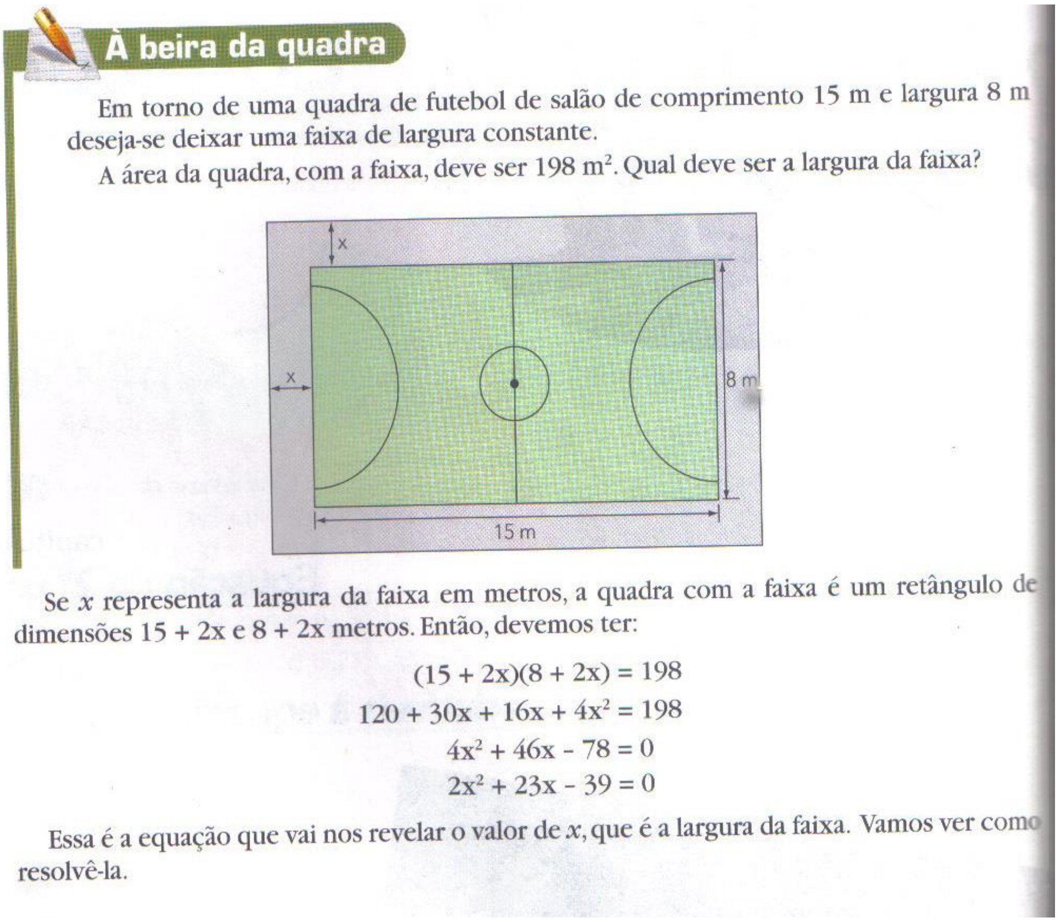
Edição: 5°

A obra de Iezzi, Doice e Machado é divida em quatro volumes. O volume 4 é referente à oitava série (nono ano) do Ensino Fundamental. Analisamos esse volume, pois, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, é nesse momento em que devem ser introduzidas as Equações quadráticas ou Equações do segundo grau.

Realmente, é nesse volume que os autores tratam das equações quadráticas. Exatamente no capítulo 7, página 62. Nos outros volumes, nada é comentado a respeito desse tema, no entanto, os próprios PCNs (1998) não sugerem essa necessidade.

Ao longo do capítulo, podemos verificar muitas seções, títulos, exercícios, quadros de informações, etc. Apesar de ser um livro voltado para adolescentes (13 ou 14 anos), pois essa é a idade costumeira de alunos do nono ano do Ensino Fundamental, são usados muitos desenhos infantis, além de imagens ilustrativas.

Os autores começam a ensinar equações quadráticas através de um problema com as medidas de uma quadra de futebol de salão. A imagem abaixo mostra o problema utilizado no livro.



À beira da quadra

Em torno de uma quadra de futebol de salão de comprimento 15 m e largura 8 m deseja-se deixar uma faixa de largura constante.

A área da quadra, com a faixa, deve ser 198 m². Qual deve ser a largura da faixa?

Se x representa a largura da faixa em metros, a quadra com a faixa é um retângulo de dimensões 15 + 2x e 8 + 2x metros. Então, devemos ter:

$$(15 + 2x)(8 + 2x) = 198$$
$$120 + 30x + 16x + 4x^2 = 198$$
$$4x^2 + 46x - 78 = 0$$
$$2x^2 + 23x - 39 = 0$$

Essa é a equação que vai nos revelar o valor de x, que é a largura da faixa. Vamos ver como resolvê-la.

FIGURA 1. Início do tema equações quadráticas.

Fonte: IEZZI, 2005, p. 63.

Percebemos que, ao apresentar o problema, os autores usam os conceitos de área e cálculo algébrico para chegar a expressão $2x^2 + 23x - 39 = 0$, definida no texto seguinte como equação do 2° grau. A definição enunciada no livro é a seguinte:

> No problema acima recaímos numa equação do 2° grau, assim chamada porque o termo de maior grau na equação tem grau 2.
> Chama-se equação do 2° grau na incógnita x toda equação que pode ser colocada na forma $ax^2 + bx + c = 0$ em que a, b, c são números reais e $a \neq 0$. (IEZZI, 2005, p. 62)

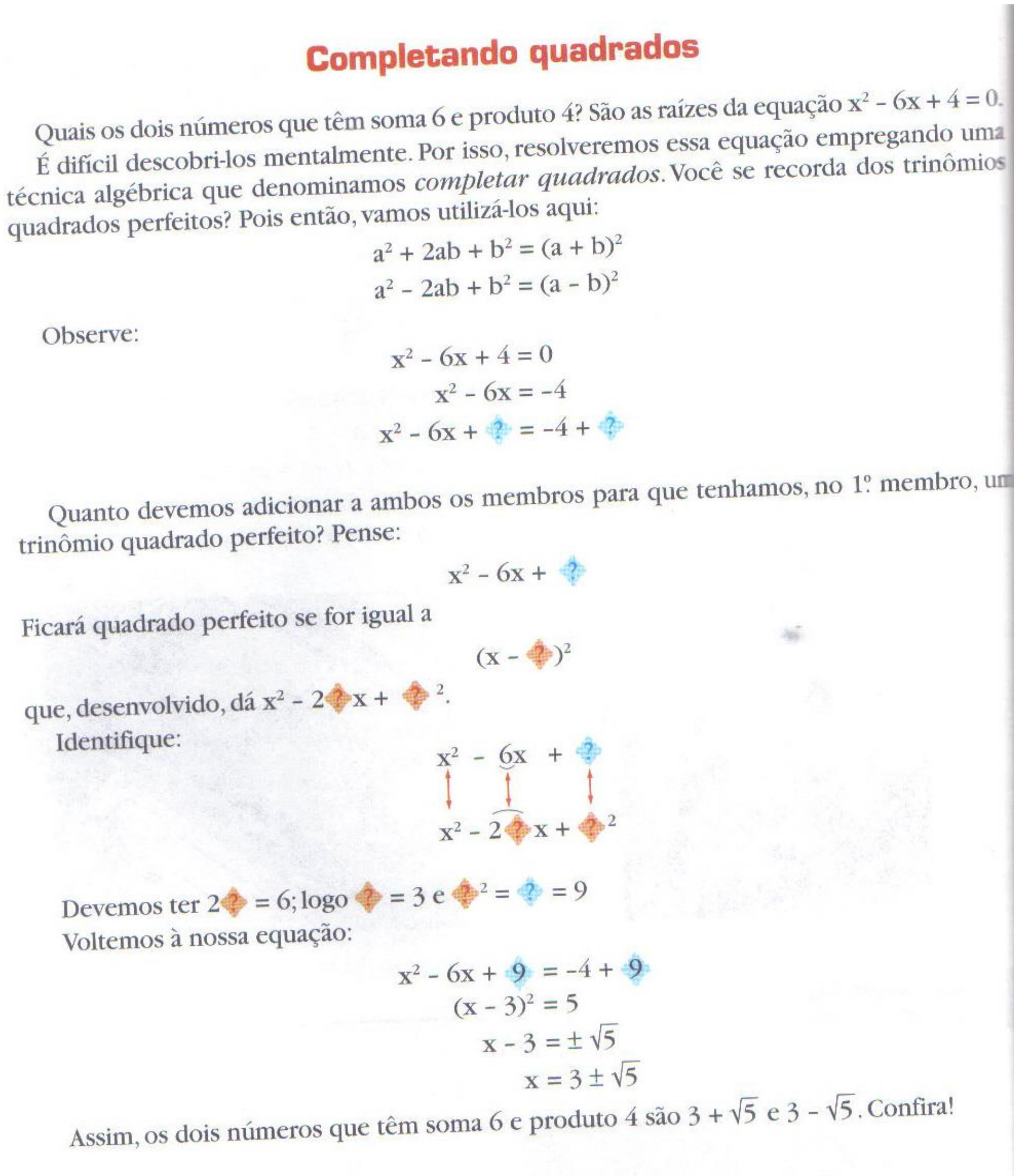
Os autores fazem um exercício de identificação dos coeficientes a, b e c numa equação com incógnita x e logo em seguida, já iniciam um texto sobre a resolução dessas equações. O título é bastante sugestivo: *"vamos resolver sem fórmula".* Nesse texto, os autores resolvem equações do segundo grau incompletas por meio de fatoração e das propriedades de igualdade, além das regras de potenciação e radiciação, que também são necessárias para se chegar às raízes dessa equação. As operações são comentadas e mostradas passo a passo, a fim de que os alunos possam, em seguida, copiar os mesmos procedimentos e resolver uma série de exercícios propostos.

O próximo texto ensina como descobrir as raízes de equações quadráticas completas, através da soma e do produto delas. Dessa vez, os autores se apoiam em uma fórmula: $x^2 - Sx + p = 0$ para iniciar o estudo do tema. Depois da apresentação e explicação dessa fórmula, vários exemplos são mostrados e os alunos têm uma noção razoável de todos os possíveis casos que podem surgem na hora de resolver uma equação do segundo grau usando essa técnica. Logo depois, mais uma lista de exercícios é proposta, agora com exercícios que envolvem figuras geométricas também, que por sinal, só haviam sido utilizadas na atividade introdutória do capítulo (quadra de esporte).

O quarto do texto tem como título *"completando quadrados"* e como o próprio nome diz, ensina a técnica de completar quadrados para resolver uma equação do segundo grau. Segundo os autores, é uma técnica algébrica para transforma uma equação quadrática qualquer em um trinômio quadrado perfeito, semelhantes aos apresentados no texto anterior. A Figura 2 mostra como o autor faz para ensinar esse assunto, assim como os exercícios propostos posteriormente, para que os alunos treinem a técnica ensinada.

O capítulo continua com a apresentação da fórmula de Bhaskara. O autor parte da técnica anterior (completando quadrados) para demonstrar a fórmula de resolução das equações quadráticas. Essa demonstração não ocorre por completo, pelo contrário, várias passagens são puladas, tornando essencial a ajuda de um professor para se entender todos os passos dados até se chegar ao quadro final. A figura 3 mostra como o autor realizou todos esses passos. A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de descriminante e identificada pela letra grega Δ. Depois de caracterizada, a fórmula de Bhaskara já é utilizada para se resolver uma equação qualquer do segundo grau.

As equações literais também são tratadas no livro, logo após o estudo da resolução das equações quadráticas pela fórmula geral. O texto apresenta um conteúdo muito simples e formal: a partir de uma situação cotidiana (dimensões de um terreno), o autor introduz as equações literais, considerando que um dos lados do terreno é representado pela letra s. para resolver a equação literal x² - 50x + s = 0, os autores se utilizam unicamente da fórmula de Bhaskara. Para determinar o valor de s, são aplicadas as propriedades das igualdades e as regras de potência e radiciação.



Completando quadrados

Quais os dois números que têm soma 6 e produto 4? São as raízes da equação $x^2 - 6x + 4 = 0$. É difícil descobri-los mentalmente. Por isso, resolveremos essa equação empregando uma técnica algébrica que denominamos *completar quadrados*. Você se recorda dos trinômios quadrados perfeitos? Pois então, vamos utilizá-los aqui:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Observe:

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$
$$x^2 - 6x = -4$$
$$x^2 - 6x + ? = -4 + ?$$

Quanto devemos adicionar a ambos os membros para que tenhamos, no 1º membro, um trinômio quadrado perfeito? Pense:

$$x^2 - 6x + ?$$

Ficará quadrado perfeito se for igual a

$$(x - ?)^2$$

que, desenvolvido, dá $x^2 - 2?x + ?^2$.

Identifique:

$$x^2 - 6x + ?$$
$$x^2 - 2?x + ?^2$$

Devemos ter $2? = 6$; logo $? = 3$ e $?^2 = ? = 9$

Voltemos à nossa equação:

$$x^2 - 6x + 9 = -4 + 9$$
$$(x - 3)^2 = 5$$
$$x - 3 = \pm\sqrt{5}$$
$$x = 3 \pm \sqrt{5}$$

Assim, os dois números que têm soma 6 e produto 4 são $3 + \sqrt{5}$ e $3 - \sqrt{5}$. Confira!

FIGURA 2. Resolução de equações. Completando quadrados.

Fonte: IEZZI, 2005, p. 68

Somente depois de tratar desses assuntos, é que a quantidade de raízes de uma equação quadráticas é estudada no texto: *"Quantas raízes"*. Ali, os autores comentam sobre os valores assumidos pelo discriminante Δ nas equações do segundo grau. São dados exemplos numéricos e depois definidas numa tabela, as três possíveis possibilidades. Em seguida, são propostas atividades em que os alunos apenas resolvem o discriminante da equação, para fixar o conteúdo estudado.

A fórmula de Bhaskara

Ainda não respondemos ao problema proposto no início deste capítulo: a largura da faixa, em metros, é raiz da equação $2x^2 + 23x - 39 = 0$.

Vamos partir da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

Multipliquemos os dois membros por 4a:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Completemos o quadrado do 1º membro:

$$\underset{(2ax)^2}{4a^2x^2} + \underset{2 \cdot 2ax \cdot b}{\underbrace{4abx}} + \underset{b^2}{?} = -4ac + ?$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Caso $b^2 - 4ac$ seja negativo, a equação não tem solução real. Caso $b^2 - 4ac$ não seja negativo, podemos extrair sua raiz quadrada. Assim:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Daí resulta a fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

conhecida como *fórmula de Bhaskara*.

Na fórmula de Bhaskara, o número $b^2 - 4ac$ é muito importante e, por isso, tem um nome próprio: $b^2 - 4ac$ é chamado *discriminante* da equação e é simbolizado pela letra grega Δ.
Portanto:

$b^2 - 4ac = \Delta$ (A letra grega Δ lê-se *delta*.)

A fórmula também pode ser escrita assim:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Agora vamos calcular a largura da faixa.
Em $2x^2 + 23x - 39 = 0$, temos $a = 2$, $b = 23$ e $c = -39$. Então:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 23^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-39) = 529 + 312 = 841$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-23 \pm \sqrt{841}}{2 \cdot 2} = \frac{-23 \pm 29}{4}$$

$$1^{\underline{a}} \text{ raiz: } x_1 = \frac{-23 + 29}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$2^{\underline{a}} \text{ raiz: } x_2 = \frac{-23 - 29}{4} = \frac{-52}{4} = -13$$

FIGURA 3. Resolução de equações. A fórmula de Bhaskara.

Fonte: IEZZI, 2005, p. 69.

Os autores ainda ensinam as propriedades da soma e do produto das raízes. Para isso, utilizam uma equação na forma $x^2 - sx + p = 0$ para deduzir as duas fórmulas pretendidas, a partir da fórmula de Bhaskara: $-\frac{b}{a}$ (soma das raízes) e $\frac{c}{a}$ (produto das raízes). Todo o processo de dedução dessas fórmulas é descrito no livro, que ainda trás, valida cada fórmula com o uso de exemplos numéricos e comenta sobre os casos de equações com discriminante negativo.

O último texto do capítulo é *"Forma Fatorada do trinômio do 2º grau"*, onde os autores comentam sobre a resolução (ou montagem) de equações quadráticas a partir da fórmula: $a(x - x')(x - x'')$, onde x' e x'' são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. O estudo é feito de maneira rápida, com poucas palavras e poucos exemplos.

Ao longo de todo o capítulo, no final de cada texto (tema) estudado são propostos vários exercícios relativos ao respectivo tema. As listas de exercícios são enormes e visam principalmente a memorização de técnicas tratadas no texto. A exceção são os desafios, que por sua vez, dão prioridades para o raciocínio dos alunos.

Segundo Livro Analisado

Livro: Matemática Scipione

Autores: Scipione Di Pierro Netto

Editora: Scipione

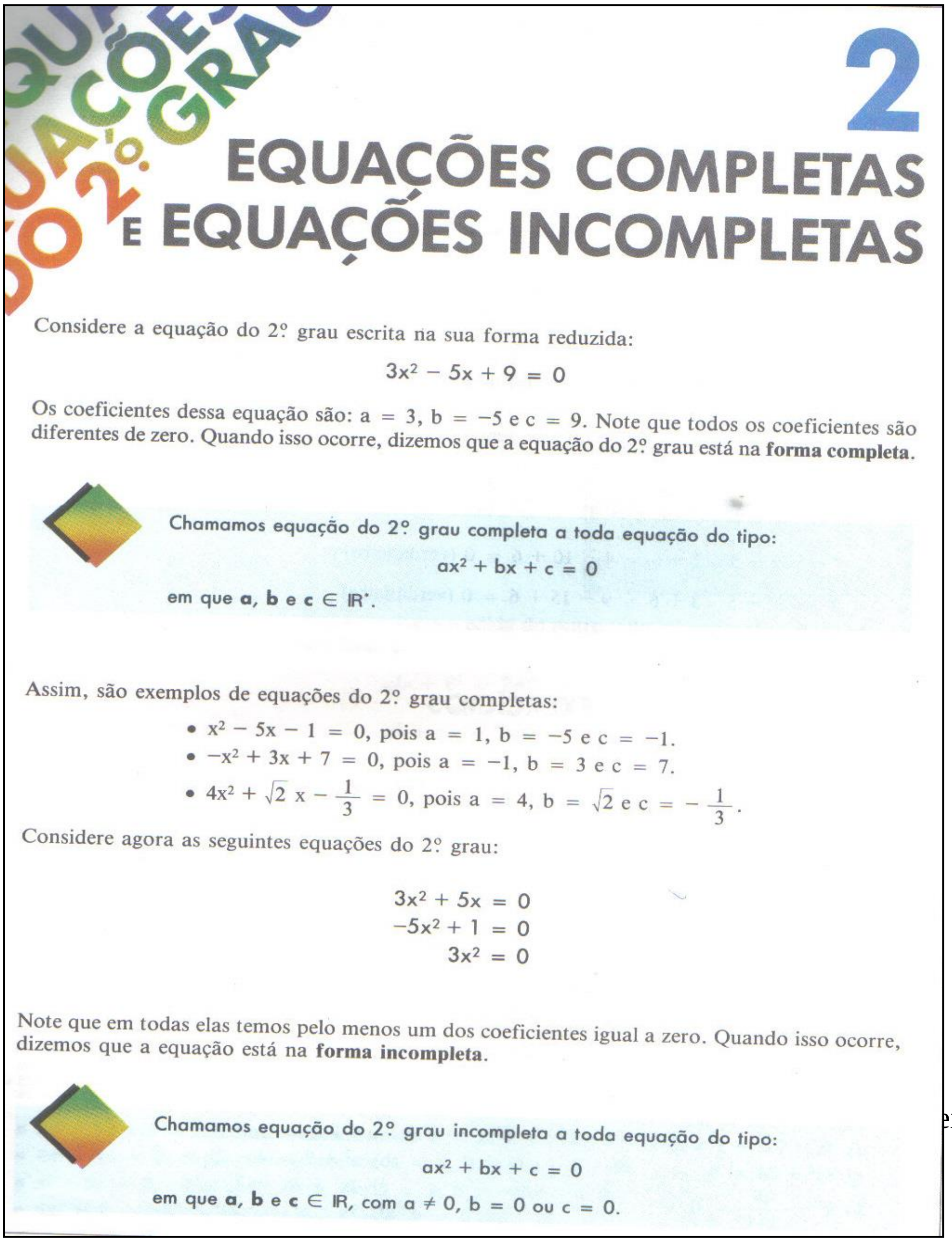
Ano de publicação: 1998

Edição: 6ª

O livro Matemática Scipione ensina Equações do segundo grau no capítulo II do volume 4, correspondente à oitava série ou nono ano do Ensino Fundamental. Existem várias seções no capítulo, que ajudam o aluno a compreender por inteiro o assunto trabalhado. Todos os capítulos, sem exceção, terminam com uma lista de exercícios, chamada pelo autor de *exercícios complementares*, que envolvem todos os assuntos abordados ao longo do capítulo.

As equações do segundo são introduzidas por meio de um problema de geometria, onde é solicitado o valor de cada lado de um retângulo, cujo comprimento igual a x, largura igual a $x + 8$ e área igual a 240m². O autor demonstra que, para determinar o valor de cada lado do retângulo, antes é necessário resolver a equação $x^2 + 8x = 240$, dada pela fórmula da área do retângulo (lado x lado). Depois de comentar que, tal equação não se trata de uma equação do primeiro grau, ele define as equações quadráticas, ao mesmo tempo em que, comenta sobre os coeficientes reais (a, b, c) e a forma reduzida ($ax^2 + bx + c = 0$). Por fim, propõe uma série de exercícios para identificar coeficientes, equações quadráticas e reduzi-las à forma normal.

Os dois diferentes tipos de equações quadráticas (completas e incompletas) são tratados no tópico seguinte. A imagem abaixo mostra como o autor realiza.



EQUAÇÕES DO 2º GRAU

2

EQUAÇÕES COMPLETAS E EQUAÇÕES INCOMPLETAS

Considere a equação do 2º grau escrita na sua forma reduzida:

$$3x^2 - 5x + 9 = 0$$

Os coeficientes dessa equação são: $a = 3$, $b = -5$ e $c = 9$. Note que todos os coeficientes são diferentes de zero. Quando isso ocorre, dizemos que a equação do 2º grau está na **forma completa**.

Chamamos equação do 2º grau completa a toda equação do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

em que **a**, **b** e **c** $\in \mathbb{R}^*$.

Assim, são exemplos de equações do 2º grau completas:

- $x^2 - 5x - 1 = 0$, pois $a = 1$, $b = -5$ e $c = -1$.
- $-x^2 + 3x + 7 = 0$, pois $a = -1$, $b = 3$ e $c = 7$.
- $4x^2 + \sqrt{2}\,x - \frac{1}{3} = 0$, pois $a = 4$, $b = \sqrt{2}$ e $c = -\frac{1}{3}$.

Considere agora as seguintes equações do 2º grau:

$$3x^2 + 5x = 0$$
$$-5x^2 + 1 = 0$$
$$3x^2 = 0$$

Note que em todas elas temos pelo menos um dos coeficientes igual a zero. Quando isso ocorre, dizemos que a equação está na **forma incompleta**.

Chamamos equação do 2º grau incompleta a toda equação do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

em que **a**, **b** e **c** $\in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, $b = 0$ ou $c = 0$.

FIGURA 4. Equações completas e incompletas.
Fonte: NETTO, 1997, p. 34

Depois dessas informações, são dados vários exemplos numéricos de equações incompletas, mostrando todos os casos ($ax^2 = 0$, $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$) e preparando os alunos para resolverem a próxima lista de exercícios que aparece em seguida, justamente, pedindo para classificar as equações quadráticas dadas em completas e incompletas.

O terceiro item comenta mais uma vez sobre a forma normal (reduzida) das equações quadráticas. No entanto, o objetivo agora é fazer os alunos reduzirem equações do tipo: $(x+1) \cdot (x-3) = 4 \cdot (x-2)$ *ou* $\frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = 1$ *(com* $x \neq \pm 2$*).* Para isso, vários exemplos são resolvidos e depois é proposta uma lista enorme de exercícios semelhantes aos exemplos, para que os alunos memorizem bem as técnicas de resolução.

O item seguinte trabalha as raízes das equações quadráticas. Aqui, o autor parte de exemplos de substituição do x de algumas equações do segundo grau por determinados valores, tornando sim ou não, as igualdades adquiridas verdadeiras. Logo em seguida, é definida formalmente o termos raiz de uma equação:

> Chamamos raiz de uma equação do 2° grau ao número real que, atribuído à variável, transforma essa equação numa sentença matemática verdadeira.
> Assim, para saber se determinado número é ou não raiz de uma equação, devemos substituir a variável x por esse número. se a igualdade torna-se verdadeira para esse valor de x, então esse valor é raiz ou solução da equação. (NETTO, 1997, p. 37)

Outros muitos exemplos numéricos são apresentados e resolvidos, todos na variável x, a fim de que os alunos tenham plena consciência do que fazer para verificar se um determinado valor é ou não raiz de uma equação quadrática. Os exercícios propostos seguem a mesma linha de pensamento e pedem que os alunos verifiquem se os valores dados em cada item são raízes das equações do segundo grau dadas. Todas elas na variável x.

O próximo item trata da resolução das equações incompletas. Os três casos dessas equações são resolvidos a partir das formas normais ($ax^2 = 0$, $ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$). O autor demonstra cada passo a ser dado rumo à solução dessas equações e depois apresenta exemplos numéricos, cujas resoluções são feitas somente pela fórmula geral encontrada ou utilizando os mesmos procedimentos para se resolver a equação geral. A tabela a seguir mostra como o autor trabalha as equações incompletas do caso $ax^2 + c = 0$.

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \text{ (que só existem se } \frac{-c}{a} \geq 0\text{)}$$

Assim, as raízes da equação $ax^2 + c = 0$ são $x = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

Esse procedimento pode ser aplicado para resolver a equação $4x^2 - 25 = 0$:

$$4x^2 - 25 = 0 \leftrightarrow 4x^2 = 25$$

Ou

$$x^2 = \frac{25}{4} \leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x = \pm\frac{5}{2}$$

Quadro 1. Resolução de equações incompletas. Caso $ax^2 + c = 0$.
Fonte: NETTO, 1997, p. 39

Algo parecido acontece com os outros dois casos. O texto segue então, com uma reflexão sobre equações e raízes quadradas. Depois aparece a lista de exercícios, que envolvem os três casos de equações do segundo grau incompletas, misturados ou separados e até mesmo em problemas simples de geometria.

Depois de resolver as equações incompletas o livro começa a resolver as equações quadráticas completas. Para isso, são apresentadas equações do tipo trinômios quadrados perfeitos, onde a fatoração é realizada facilmente. O autor, por exemplo, apresenta a equação $x^2 - 8x + 16 = 0$, que pode ser fatorada em $(x – 4)^2 = 0$ e resolvida por técnicas elementares de álgebra. Continuando o texto, é apresentada a equação $x^2 - 8x + 15 = 0$, cuja fatoração em trinômio quadrado perfeito não é possível, a não ser, segundo o próprio autor, se somado for uma unidade em cada membro da equação. Dessa forma, obteremos a equação $x^2 - 8x + 16 = 1$, que fatorada fica: $(x – 4)^2 = 1$ e, logo, também pode ser resolvida por técnicas algébricas simples.

Com essas informações, o autor afirma que é possível fazer os mesmos procedimentos e determinar uma fórmula geral para resolução de equações do segundo grau. E é assim que acontece, no entanto, durante a demonstração da fórmula de Bhaskara, são pulados vários passos, que podem comprometer a compreensão dos alunos. A imagem abaixo mostra o que foi descrito e o que foi pulado.

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$ e acompanhe as etapas para a obtenção da fórmula geral.
Isolamos c no 2º membro:

$$ax^2 + bx = -c$$

Dividimos por a os dois membros:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Completamos o trinômio quadrado perfeito, adicionando $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos os membros:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ chama-se **discriminante** da equação do 2º grau, e é representada pela letra grega maiúscula Δ (delta).

Podemos então escrever a fórmula obtida assim:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac}$$

Δ
DISCRIMINANTE
$b^2 - 4ac$

Essa é a fórmula geral para a resolução de equações do 2º grau, também conhecida como **fórmula de Bhaskara** (pronuncia-se "Báscara").
Vamos resolver algumas equações completas do 2º grau, utilizando a fórmula geral.

FIGURA 5. Demonstração da Fórmula de Bhaskara.
Fonte: NETTO, 1997, p. 43.

Após essa demonstração e esses comentários, são apresentados dois exemplos de equações completas sendo resolvidas pela fórmula de Bhaskara. No final, o autor realiza a verificação, a fim de confirmar que os resultados obtidos são mesmo raízes das equações. Uma nova lista de exercícios é proposta, agora com o objetivo de fazer com que os alunos memorizem a resolução de equações quadráticas completas por meio da fórmula de Bhaskara.

A seguir, o autor trata nos itens seguintes assuntos como *Equações fracionárias redutíveis ao 2° grau* e *equações literais do 2º grau.* Aqui, são utilizados os mesmos métodos dos itens anteriores. Os assuntos e os termos são definidos, vários exemplos, gerais ou numéricos são citados, e por fim, uma lista de exercícios de fixação é proposta aos alunos. Como o próprio título deixa claro, o primeiro item trata de equações em forma de frações e o segundo trata de equações com coeficientes algébricos.

O livro começa então a trabalhar com o *discriminante da equação do segundo grau*, ou seja, com a expressão $b^2 - 4ac$, representada nessa e em outras obras, pela letra grega Δ. Cada caso ($\Delta > 0$, $\Delta < 0$, $\Delta = 0$) é descrito e formalizado pelo autor, depois é apresentado um exemplo numérico, a fim de que se torne melhor a percepção dos estudantes. Como as equações literais já foram estudadas antes, alguns outros exemplos são apresentados, justamente com discriminantes algébricos. No final do texto, praticamente, é apresentada uma tabela de resumo dos casos possíveis do discriminante da equação quadrática. A citação abaixo mostra o que escreveu o autor.

> Resumindo, temos as seguintes situações possíveis:
> $\Delta > 0$ → raízes reais e diferentes
> $\Delta = 0$ → raízes reais e iguais
> $\Delta < 0$ → não há raízes reais
> NETTO, 1997, p. 52

Os próximos assuntos são *Relações entre coeficientes e raízes* e *composição de uma equação*. O primeiro demonstra como são determinadas as relações de soma ($x' + x'' = -\frac{b}{a}$) e produto ($x' . x'' = \frac{c}{a}$) entre as raízes e os coeficientes de uma equação do segundo grau, além de comentar a importância disso para a resolução de problemas. Já no item sobre a composição de equações, na verdade, o assunto principal é decorrente da relação entre os coeficientes de soma e produto das raízes de uma equação. O autor demonstra como uma equação quadrática pode ser escrita sob a forma $x^2 - (x' + x'')x + (x' . x'') = 0$, em outros termos, $x^2 - Sx + P = 0$, em que S é a soma e P é o produto das raízes. Depois de apresentar exemplos numéricos é proposta uma lista de exercícios sobre isso.

O último tema do capítulo sobre equações quadráticas na obra de Scipione trata da *Forma fatorada do trinômio do 2° grau*. Nesse item, o autor chama de y o trinômio ax^2

+ bx + c, assim: $y = ax^2 + bx + c$. O modo pelo qual o autor chega à forma (ou fórmula) y = a . (x – x') . (x – x") é muito técnica e interessante e por isso mostraremos na figura 6, mostrada abaixo.

Vamos fatorar um trinômio de 2º grau. Para isso chamamos de **y** o trinômio $ax^2 + bx + c$:

Vamos chamar de **y** o trinômio $ax^2 + bx + c$:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Como $a \neq 0$, podemos dividir os dois membros por **a**.

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

Lembrando que $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ e $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$, podemos escrever:

$$\frac{y}{a} = x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}$$

$$\frac{y}{a} = x^2 - (x' + x'')x + x' \cdot x''$$

$$\frac{y}{a} = x^2 - x' \cdot x - x'' \cdot x + x' \cdot x''$$

Fatorando por agrupamento, temos:

$$\frac{y}{a} = x(x - x') - x''(x - x')$$

$$\frac{y}{a} = (x - x') \cdot (x - x'')$$

Multiplicando os dois membros por **a**, obtemos:

$$y = a \cdot (x - x') \cdot (x - x'')$$

que é a forma fatorada do trinômio do 2º grau.

Imagem 6. Fatoração do trinômio do 2° grau.
Fonte: NETTO, 1997, p. 59

Depois de fazer essa demonstração, são apresentados exemplos numéricos, nos quais, trinômios do segundo grau são fatorados seguindo essa técnica. Os exercícios de fixação propostos também seguem a mesma linha de procedimento.

No encerramento do capítulo surgem duas novas listas de exercícios. A primeira é chamada de complementar, pois envolve exercícios de todos os assuntos ou itens tratados no capítulo. Funciona como uma espécie de revisão, ao mesmo tempo em que, exercícios de níveis mais difíceis são propostos e, portanto, aumentam a qualidade do conhecimento do aluno. A última lista de exercícios é de aprofundamento e envolvem exercícios de alto nível, que são compostos por temas além dos estudados no atual capítulo e por isso, são de resolução mais complexa.

Considerações finais sobre os dois livros analisados

Os livros que analisamos se mostraram muito tradicionais, no sentido de não proporem situações-problemas aos alunos. Ambas as obras enunciavam as definições dos assuntos abordados e logo depois propunham exercícios de fixação das técnicas apresentadas. Esse tipo de metodologia é criticado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, como percebemos na introdução desse Trabalho de Conclusão de Curso. Os PCNs (1998) sugerem a adoção de atividades mais estimulantes do pensamento, para que os alunos sintam a necessidade de se conhecer tal assunto para resolver certo problema e assim, eles mesmos tomem as ações necessárias para aprender.

Notamos também que, os dois livros trazem um pouco de geometria quando abordam os temas relacionados com equações quadráticas. A área de retângulos e quadrados são sempre temas ligados à composição e a resolução de equações do segundo grau. Inclusive, é dessa maneira que as duas obras começam a tratar de equações quadráticas: apresentando o cálculo da área de um retângulo com lados de medidas algébricas. Essa prática sim é aconselhada e parabenizada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), q eu sempre foca na importância de relacionar as grandes áreas da matemática (álgebra e geometria).

Quanto aos exercícios também percebemos uma enorme semelhança entre as duas obras. Em primeiro lugar, o número de exercícios é enorme, pois o objetivo é fixar nos alunos as técnicas descritas nos textos, por isso também, são exercícios com características repetitivas. Em segundo lugar, são exercícios com poucos questionamentos, apenas técnicos. Poucos são os problemas, por exemplo, envolvendo geometria ou situações do cotidiano, ou seja, problemas que obriguem o aluno a pensar sobre aquilo que ele está resolvendo. Essa metodologia não é aconselhada pelos PCNs (1998), que deixam bem claro, como comentamos na introdução, que a matemática é rica justamente por permitir desenvolver nas pessoas o raciocínio lógico. Mas para que isso acontece se faz necessário que essas pessoas, no caso os alunos, resolvam problemas e não apenas apliquem técnicas ou fórmulas de resolução de maneira mecânica.

Para finalizar é importante citar que, as duas obras ensinam equações quadráticas no período indicado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998): oitava série do Ensino Fundamental, depois do estudo de potenciação e radiciação.

REFERÊNCIAS

BARCELOS, Nádja Marques dos Santos. **O ensino das Equações Quadráticas no Ensino Médio** / Nádja Marques dos Santos de Barcelos. Trabalho de Conclusão de Curso submetido á Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Santo André. – Santo André: 2011.

BOYER, Carl Benjamim. **História da Matemática.** Trad. Elza F Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/ SEF, 1998.

CARNEIRO, Bernardino de Andrade. **A evolução histórica da resolução das equações do 2° grau** / Bernardino Carneiro de Andrade. Dissertação de mestrado submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. – Porto: 2000.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

IEZZI, Gelson. **Matemática e Realidade: 8° série** / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado; São Paulo: Atual, 2005.

NETTO, Scipione Di Pierro. **Matemática scipione /** Scipione Di Pierro Netto. São Paulo: Scipione, 1997.

PITOMBEIRA, João Bosco de Carvalho. **Episódios da História Antiga da Matemática /** João Bosco Pitombeira de Carvalho. São Paulo: 1984.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias** / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – São Paulo: SEE, 2010.

A EDUCAÇÃO ESPECIAL E O AUTISMO

Luiz Carlos Gorgonha

RESUMO

Crianças são rotuladas com palavras pejorativas muitas vezes, quando são hiperativas, disléxicas, autistas, sendo muitas vezes são vulgarmente chamadas de incapazes. Este estigma por muitos momentos não tem fundamentação teórica, sendo apenas suposições, e parte da falta de conhecimento da própria sociedade em si. O próprio corpo docente muitas vezes se isola em situações que ocorrem na sala de aula, a partir do surgimento dos sintomas apresentados, e de situações isoladas. Este artigo tem como objetivo discorrer sobre o tema da educação inclusiva. A natureza metodológica escolhida para a criação deste trabalho é qualitativa, buscando assim, levantar todas as informações teóricas a fim de se chegar à conclusão, a partir de uma revisão bibliográfica.

Palavras-chave: Autismo. Inclusão. Educação Especial.

ABSTRACT

Physical education plays a crucial role in the global development of children in both preschool and elementary education. In addition to promoting physical and mental health, physical education also contributes to the cognitive, social, and emotional development of students. Through physical activities and sports, children learn fundamental motor skills, engage in social interaction, strengthen teamwork, and learn to handle challenges and overcome limitations. Additionally, physical education helps combat sedentary lifestyles and promotes healthy living habits from childhood, preventing diseases related to sedentary lifestyles. Therefore, the inclusion of physical education in the school curriculum is essential to ensure the integral and healthy development of children from early years to adulthood. This study was conducted through methodological procedures of bibliographic research in books, websites, and articles, based on the ideas of key authors who discuss the importance of Physical Education in preschool and elementary education. It encompasses the significance of introducing this topic to education as a tool for strengthening the child as a subject and serving as an instrument for all study areas aimed at organization in our schools.

Keywords: Physical Education, child, learning, games, play.

INTRODUÇÃO

Observa-se na dinâmica escolar alguns problemas enfrentados, desde a estrutura física, a falta de parceria colégio com a família, a didática de ensino da docência em relação aos seus alunos, dentre outros. Diante de tantas variáveis que permeiam o contexto escolar, os distúrbios de aprendizagem, dentre os quais estão a discalculia, a disortagrafia, a dislexia, o autismo, entre outros, vem se apresentando de forma significativa.

O autismo, também conhecido como síndrome do espectro autista, é um transtorno invasivo do desenvolvimento, e concretizado pela falta de maturação do cérebro, o que pode ocorrer antes, durante ou após o nascimento da criança. O termo vem da palavra grega, onde *autos* significa “próprio / eu” e tem significado de mostrar uma situação de espírito na qual se encontra a pessoa.

O transtorno do espectro autista constitui-se de déficits de comunicação social e interação social, os quais persistem em diversos contextos, dentre eles o déficit na reciprocidade socioemocional, o déficit nos comportamentos comunicativos não verbais usados para interação social e o déficit para desenvolver, manter e compreender relacionamentos.

O Brasil apresenta, aproximadamente, 1,2 milhões de pessoas com autismo e necessitaria de quase 40 mil instituições para cuidar de seus cidadãos com transtornos globais de desenvolvimento.

E neste contexto é necessária a educação inclusiva, que trate de acolher, incluir todos os alunos, sejam eles neurotípicos e neuroatípicos. No entanto, é necessário que se levante um questionamento acerca de qual o papel da escola diante destas necessidades e acerca do caráterde inclusão.

Há ainda se tem muita a ser avançado, e é necessário o preparo pelo corpo docente para lidar com o aluno especial, que possui dificuldades de aprendizado. Com a falta de conhecimento, de forma geral, se gera uma rotulação, pois as poucas informações, por vezes distorcidas ocasionam o preconceito.

O AUTISMO

O autismo, também conhecido como transtorno do espectro autista, é um transtorno invasivo do desenvolvimento, e concretizado pela falta de maturação do cérebro, o que pode ocorrer antes, durante ou após o nascimento da criança. O termo vem da palavra grega, onde *autos* significa “próprio / eu” e tem significado de mostrar uma situação de espírito na qual se encontra a pessoa. (KLIN, 2006)

Estudos indicam que em 1943 Leo Kanner o psiquiatra infantil publicou um artigo intitulado “Distúrbios autísticos do contato afetivo”, com base nas observaçõesrealizadas com
11 crianças que apresentavam algumas características o isolamento,
comportamentosestereótipos de repetição, dificuldades na comunicação e
socialização.

Queiroz (2021) afirma que o termo “autismo” foi utilizado pela primeira vez em1911, pelo o psiquiatra austríaco Eugen Bleuler, para descrever uma das características de pessoas com esquizofrenia, se referindo ao isolamento social dos indivíduos acometidos. De acordo com Silva, Gaiato e Reveles (2012, p.111) otermo "autismo" é derivada da palavra grega "autos", que significa "voltar-se para si mesmo".

Hans Asperger evidenciou o termo “psicopatia autística” e chamava as crianças de “pequenos mestres”, em virtude das habilidades que as crianças tinham para realizar atividades que exigiam atenção para os detalhes. Segundo Silva, Gaiato e Reveles (2012) a partir da década de 1960, a psiquiatra inglesa Lorna Wing,iniciou a publicação de textos de grande relevância para o estudo do TEA, com base nas experiências vivenciadas com sua filha que apresentava o transtorno.

O TEA, até então ainda permanecia como um sub grupo dentro das psicoses infantis, sendo considerada como uma forma de esquizofrenia. Então a retida doTEA da categoria psicose no DSM-III (Manual Diagnóstico e Estatístico de Transtornos Mentais) e CID-10 (Classificação Estatística Internacional de Doenças eProblemas Relacionados à Saúde), ocorreu na década de 1980, passando a fazer parte dos Transtornos Globais do Desenvolvimento. (QUEIROZ, 2021)

O transtorno do espectro autista constitui-se de déficits de comunicação social e interação social, os quais persistem em diversos contextos, dentre eles o déficit na reciprocidade socioemocional, o déficit nos comportamentos comunicativos não verbais usados para interação social e o déficit para desenvolver, manter e compreender relacionamentos. (WON et al, 2013) E as crianças e adolescentes autistas apresentam também problemas de percepção e sensoriais, em graus diferentes, no entanto. É comum que crianças autistas sejam seletivas e avessas à novidade, tornando-se indisciplinadas, por conta de sua recusa excessiva. (SMITH;
BOSA, 2003)

Em 2013, completou 70 anos da descoberta do autismo. Foi escrito pela primeira vez em 1943 nos Estados Unidos pelo médico austríaco Leo Kanner. Desde então, vários estudos vêm se aprofundando para tentar, mais precisamente, compreender as causas e efeitos em uma pessoa que recebe esse diagnóstico. O autismo é ainda um problema com várias lacunas a serem preenchidas sobre seu tratamento, mudando a rotina de famílias, escolar, associações, dentre outros que se dispõem a auxiliar no dia a dia dessas pessoas envolvidas direta e indiretamente.(KLIN, 2006)

É um dos mais conhecidos entre os Transtornos Invasivos do Desenvolvimento (TID), onde caracteriza-se pelo início precoce de atrasos e desvios no desenvolvimento das habilidades sociais, comunicativas e cognitivas, ocorrendo uma interrupção dos processos normais. (WON et al, 2013)

Em razão das características dos Transtornos Globais do Desenvolvimento, as intervenções devem ser multidisciplinares, contemplando os aspectos da psicologia, fonoaudiologia e nutrição, entre outros. Possuem sérios problemas no desenvolvimento da linguagem, alguns parecem fechados num mundo idealizado por eles e distantes, porém todos têm comportamentos estereotipados. (MELO et al, 2013)

Alguns estudos divulgam que a maioria dos adolescentes com autismo apresentam diferentes graus de problemas de percepção e sensoriais. Crianças autistas apresentam-se muito seletivas e resistentes às novidades. (SMITH; BOSA, 2003)

Esses sintomas são evidenciados desde a infância, juntamente com as exteriorizações típicas, incluindo anormalidades sensoriais e motoras, perturbações do sono, hiperatividade, crises de epilepsia, momentos de agressividade, bipolaridade, ansiedade entre outras manifestações atípicas. Vale salientar os cuidados de uma avaliação como essa para não confundir com outras doenças. (BRASIL, 2014)

Sendo assim, o seu diagnóstico envolve a identificação de “desvios qualitativos” do desenvolvimento (sobretudo no terreno da interação social e da linguagem); a necessidade do diagnóstico diferencial; a identificação de potencialidades tanto quanto de comprometimentos.(BRASIL, 2014)

A identificação dos primeiros sinais de problemas, sobretudo os relacionados ao TEA, possibilita uma intervenção com resultados muito positivos quando o tratamento também é precoce. Para uma maior eficácia do mesmo, a equipe multidisciplinar deve estar atenta aos sintomas que se apresentam até os 3 anos de idade. Uma avaliação eficiente vai além do simples diagnóstico, mas sim de extrair as potencialidades de cada um dos profissionais envolvidos na equipe multidisciplinar. (WON et al, 2013)

De acordo com American Psychiatric Association (2014) o Manual Diagnóstico e estatístico de transtornos mentais, foi lançado em 2013 para auxiliarno diagnóstico do TEA, em que o indivíduo deve apresentar alguns sintomas específicos que se iniciam ainda na infância que podem comprometer o desenvolvimento e habilidades para a realização das atividades do seu cotidiano.

O DSM-V o indivíduo apresenta algumas limitações que podem interferir na socialização e na comunicação dentre elas estão: Problemas de interação social ou emocional alternativo, isso implica em dificuldades para estabelecer relações sociais e interagir com outras pessoas, compartilhar sentimentos e emoções.

O indivíduo com TEA apresenta, em alguns casos, uma falta de interesse por outras pessoas, dificuldades de engajar e realizar atividades do cotidiano inerentes a sua faixa etária,e problemas de adaptação. Dificuldades na comunicação não verbal, isso resulta na incapacidadeda estabelecer e manter contato visual, a ausência de expressões faciais, gestos, podendo ainda apresentar comportamentos estereótipos repetitivos erestritivos como: balançar o corpo, mãos, agressividade, resistência e mudanças na sua rotina, apego extremo a objetos, com interesses bastante restritivos.

As pessoas com TEA que se enquadram no nível 01 apresentam sintomas leves, tem dificuldades nas interações sociais, contudo precisam de pouco suporte especializado para auxilia-las em suas atividades diárias. Já as pessoas que são diagnosticadas no nível 2 necessitam um pouco mais de apoio especializado, sendo considerada uma faixa intermediária do TEA. Comumente apresentam dificuldades nas interações sociais, e podem ou não apresentar dificuldades na comunicação verbal, além de pouco contato visual. Por fim, o nível3, popularmente conhecido como autismo severo, são aquelas pessoas que necessitam de um maior suporte com profissionais capacitados. Apresentam dificuldades significativas nas habilidades sociais e comunicação verbal e não verbal, com comportamentos restritivos e repetitivos.

Segundo Khoury *et al*. (2014) até 2013, os manuais CID-10 e DSM-IV-TR utilizavam os termos para descrever o Transtorno Global do Desenvolvimento (TGD) e Transtorno Invasivo do Desenvolvimento (TID).

O CID-10 classifica tipos de TGD, são eles: Autismo Infantil, Autismo Atípico, Síndrome de Rett, Transtorno Desintegrativo da Infância, Transtorno com Hipercinesia associada a Retardo Mental e Movimentos Estereotipados, Síndromede Asperger, dentre outros Transtornos Globais do Desenvolvimento e Transtornos Globais do Desenvolvimento Não Especificados.

Já o DSM-IV-TR classifica cinco tipos clínicos do TID: Transtorno Autista, Transtorno de Rett, Transtorno Desintegrativo da Infância, Transtorno de Asperger e Transtorno Invasivodo Desenvolvimento sem Outra Especificação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Assim, portanto, considerando a pesquisa realizada, mediante a revisão da literatura, conclui-se que o autismo é uma deficiência e devem de fato ser devidamente trabalhada no contexto educacional, mas que, no entanto, muitas vezes, pela sua dificuldade de diagnóstico, são normalmente despercebidos pelos professores.

REFERÊNCIAS

BUENO, J. G. S. **Educação Especial Brasileira.** Integração/segregação do aluno diferente.São Paulo: EDUC. 1993.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira. Brasília:** MEC, 1996.

BRASIL. MINISTÉRIO DA SAÚDE. **Diretrizes de Atenção à Reabilitação da Pessoa comTranstornos do Espectro do Autismo (TEA).** Ministério da Saúde, Secretaria de Atenção à Saúde, Departamento de Ações Programáticas

Estratégicas. – Brasília: Ministério da Saúde,2014.

FREITAS, S. N. et. Al. **Tendências contemporâneas de inclusão**. UFSM. (1994), (2006),(2008).

KLIN, Ami. **Autismo e Síndrome de Asperger: uma visão geral.** Revista Brasileira dePsiquiatria, v. 28, n.22, 2006.

LARROSA, J**. Pedagogia profana: danças, piruetas e mascaradas.** Belo Horizonte:Autêntica, 1999.

MAYRING, Philipp. **Qualitative Content Analysis.** In: FLICK, Uwe; VON KARDOFF,Ernst; STEINKE, Ines (Ed.). A companion to qualitative research. Sage, 2004.

MANTOAN, M. T. E. **Compreendendo a deficiência mental: novos caminhos educacionais**,São Paulo: Scipione, (1988), (1989).

MELLO, Ana Maria S. Ros de; ANDRADE, Maria América; HO, Helena; SOUZA Dias, Inêsde. **Retratos do autismo no Brasil. AMA - Associação de Amigos do Autista.** São Paulo, 2013.

SCHMIDT, C.; BOSA C. **A investigação do impacto do autismo na família: revisão crítica da literatura e proposta de um novo modelo.** Interação. 2003;7:111---20.

SILVA, L.B. **Instituições escolares, problemas de aprendizagem e estratégias de intervenção e atuação psicopedagógicas.** Revista de Educação do Ideaú. Vol. 7 – Nº 15 - Janeiro - Junho 2012 Semestral ISSN: 1809-6220

WON H, WON M, EUNJOON K. **Transtorno do espectro do autismo, causas, mecanismos e tratamentos: foco em sinapses neuronais.** Frente Mol Neurosci. 2013; 6:19.